

Γραμμική Άλγεβρα Ι
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2015

1. Θεωρούμε πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

(α) Δείξτε ότι $(A+B)^2 + (A-B)^2 = 2(A^2 + B^2)$.

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ και $C = (A+B)^2 + (A-B)^2$.

(β1) Δείξτε ότι ο C είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

(β2) Βρείτε όλους τους ακραίους n για τους οποίους $C^n = I_2$.

2. Θεωρούμε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = a \\ 4x_1 + x_3 = b \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = c \end{cases}$$

με αγνώστους $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(α) Για ποιες τριάδες (a, b, c) πραγματικών αριθμών είναι συμβιβαστό το σύστημα; Για ποιες από αυτές τις τριάδες έχει μοναδική λύση;

(β) Έστω W το σύνολο των $(a, b, c)^t \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ για τα οποία το σύστημα είναι συμβιβαστό. Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$, υπολογίστε τη διάσταση του W και βρείτε μια βάση αυτού.

3. Δίνονται διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{R}$, διατεταγμένη βάση $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ αυτού και γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \rightarrow V$ με $T(v_1 - v_2) = T(v_2 - v_3) = T(v_3 - v_4)$.

(α) Δείξτε ότι $\dim(\ker(T)) \geq 2$.

(β) Έστω ότι επιπλέον έχουμε $T(v_3) = v_2 + v_4$ και $T(v_4) = v_1 + v_3$. Υπολογίστε τη διάσταση της εικόνας του T , βρείτε τον πίνακα του T ως προς τη βάση $\mathbf{v}$ και εκφράστε το $T(T(v_1))$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης αυτής.

4. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ 2 & 1+\lambda \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ο πίνακας A ισοδύναμος με τον B ;

(β) Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ο πίνακας A όμοιος με τον B ;

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 9/9/2015 – Καλή Επιτυχία

ΘΕΜΑ 1. **α:** Είναι:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 + (A-B)^2 &= (A+B)(A+B) + (A-B)(A-B) = \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 + A^2 - AB - BA + B^2 = 2(A^2 + B^2)\end{aligned}$$

β: Έχουμε από το (α) $C = 2(A^2 + B^2)$. Εκτελώντας τις πράξεις παίρνουμε

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}$$

β1: Ο C είναι αντιστρέψιμος αφού $\det C = -8 \neq 0$. Σύμφωνα με γνωστό τύπο, ο αντίστροφός του είναι

$$C^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

β2: Εξ ορισμού $C^0 = I_2$. Έστω $n \in \mathbb{Z}^*$ τ.ω. $C^n = I_2$. Τότε

$$\det C^n = 1 \Rightarrow (\det C)^n = 1 \Rightarrow (-8)^n = 1$$

το οποίο είναι άτοπο.

ΘΕΜΑ 2. **α:** Παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 4 & 0 & 1 & b \\ 3 & 1 & -1 & c \end{array} \right) &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 4 & -7 & b-4a \\ 0 & 4 & -7 & c-3a \end{array} \right) \longrightarrow \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 4 & -7 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array} \right)\end{aligned}$$

Οπότε το σύστημα είναι συμβιβαστό για τις τριάδες (a, b, c) που ικανοποιούν τη σχέση

$$a - b + c = 0$$

Το σύστημα δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση, διότι ο πίνακας συντελεστών του συστήματος δεν είναι αντιστρέψιμος.

β: Έχουμε το σύνολο

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a - b + c = 0 \right\}$$

$$\text{Έστω } w_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι $w_1 + w_2 \in W$ και $\lambda w_1 \in W$, δηλαδή W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο W είναι ο χώρος στηλών Σ_A του πίνακα των συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{R}} \Sigma_A = \text{rank}(A) \stackrel{(a)}{=} 2$$

Μια βάση του W αποτελούν οι 2 πρώτες στήλες του A , αφού περιέχουν ηγετικά στοιχεία.

Άλλος τρόπος εύρεσης βάσης του είναι ο εξής:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Συνεπώς μια βάση του } W \text{ είναι } \eta \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ΘΕΜΑ 3.

$$T(v_1 - v_2) = T(v_2 - v_3) \Leftrightarrow T(v_1) - 2T(v_2) + T(v_3) = 0 \quad (1)$$

$$T(v_1 - v_2) = T(v_3 - v_4) \Leftrightarrow T(v_1) - T(v_2) - T(v_3) + T(v_4) = 0 \quad (2)$$

$$T(v_2 - v_3) = T(v_3 - v_4) \Leftrightarrow T(v_2) - 2T(v_3) + T(v_4) = 0 \quad (3)$$

α: Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι

$$\text{Im} f = \langle T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_4) \rangle$$

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) συμπεραίνουμε πως τα διανύσματα $T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_4)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ανά τρία. Άρα $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im} f \leq 2$. Επομένως ισχύει η συνεπαγωγή

$$4 = \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \text{Im} f + \dim_{\mathbb{R}} \ker T \Rightarrow$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker T \geq 2$$

β: Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\mu \in \lambda T(v_3) + \mu T(v_4) = 0$. Τότε

$$\lambda v_2 + \lambda v_4 + \mu v_1 + \mu v_3 = 0$$

Λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των v_1, v_2, v_3, v_4 προκύπτει $\lambda = \mu = 0$, δηλαδή τα $T(v_3), T(v_4)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im} f = 2$. Για την εύρεση του ζητούμενου πίνακα ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

$$\begin{aligned} T(v_1) &\stackrel{(1)}{=} 2T(v_2) - T(v_3) \stackrel{(3)}{=} 3T(v_3) - 2T(v_4) = \\ &= -2v_1 + 3v_2 - 2v_3 + 3v_4 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$[T(v_1)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T(v_2) \stackrel{(3)}{=} 2T(v_3) - T(v_4) = -v_1 + 2v_2 - v_3 + 2v_4 \implies$$

$$[T(v_2)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(v_3) = v_2 + v_4 \implies [T(v_3)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(v_4) = v_1 + v_3 \implies [T(v_4)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$[T : \mathbf{v}, \mathbf{v}] = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας το θέμα έχουμε:

$$[T(T(v_1))]_{\mathbf{v}} = [T : \mathbf{v}, \mathbf{v}] [T(v_1)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Οπότε } T(T(v_1)) = 4v_1 - 2v_2 + 4v_3 - 2v_4.$$

ΘΕΜΑ 4. **α:** Από τη θεωρία ξέρουμε πως οι A, B είναι ισοδύναμοι ($A \sim B$) αν και μόνο αν έχουν την ίδια τάξη. Προφανώς η τάξη του B είναι 2.

- Για $\lambda = 1$ έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 2 = \text{rank}(B) \Rightarrow A \sim B.$$

- Για $\lambda \neq 1$ έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ 2 & 1+\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1: \Gamma_2 - \frac{2}{1-\lambda}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ 0 & \frac{1-2\lambda-\lambda^2}{1-\lambda} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς για $\lambda \neq 1$, $A \sim B$ όταν $1-2\lambda-\lambda^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1 \pm \sqrt{2}$

Τελικά $A \sim B$ όταν $\lambda \neq -1 \pm \sqrt{2}$

β: Ισχύει

$$A, B \text{ όμοιοι} \Rightarrow \det A = \det B$$

Είναι $\det A = \det B \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2.$

- Για $\lambda = 0$ έχουμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Έστω $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος με $AP = PB$. Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y = z \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Θέτοντας $y = 1, w = 1$, παίρνουμε τέτοιο αντιστρέψιμο πίνακα P κι έτσι οι A, B είναι όμοιοι.

- Για $\lambda = 2$ έχουμε $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Έστω $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος με $AP = PB$. Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} x = z \\ 2y = 2w - x \\ 2x = -2z \\ 2y = -2w + z \end{cases} \Rightarrow x = y = z = w = 0$$

Αφού ο μόνος P που προκύπτει είναι ο μη αντιστρέψιμος

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

οι A, B δεν είναι όμοιοι.

Γιάνναρος Μιχάλης